CHAPITRE 1 **Systèmes d'équations et d'inéquations linéaires**

I. Systèmes d'équations linéaires .

1. Définition.

Un système de deux équations à deux inconnues *x* et *y* a pour forme

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$ a, a', b, b', c, c' sont des réels connus.

Une solution du système est un couple de réels qui vérifie chacune des deux équations.

On peut généraliser la définition à des systèmes 3x3 ou n x n avec n un entier supérieur ou égal à 2.

2. Résolution d'un système

Résoudre un système, c'est trouver tous les couples solutions des équations constituant le système.

a. Résolution graphique

Méthode : 1) Ecrire les équations sous la forme **$y =$….. x + …..**
2) Tracer dans un repère les droites définies par les équations précédentes ;
3) Lire les coordonnées du point d'intersection des droites. Le couple de coordonnées du point constitue le couple solution du système.

Exemple : Résoudre le système $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-3y=6 \end{cases}$

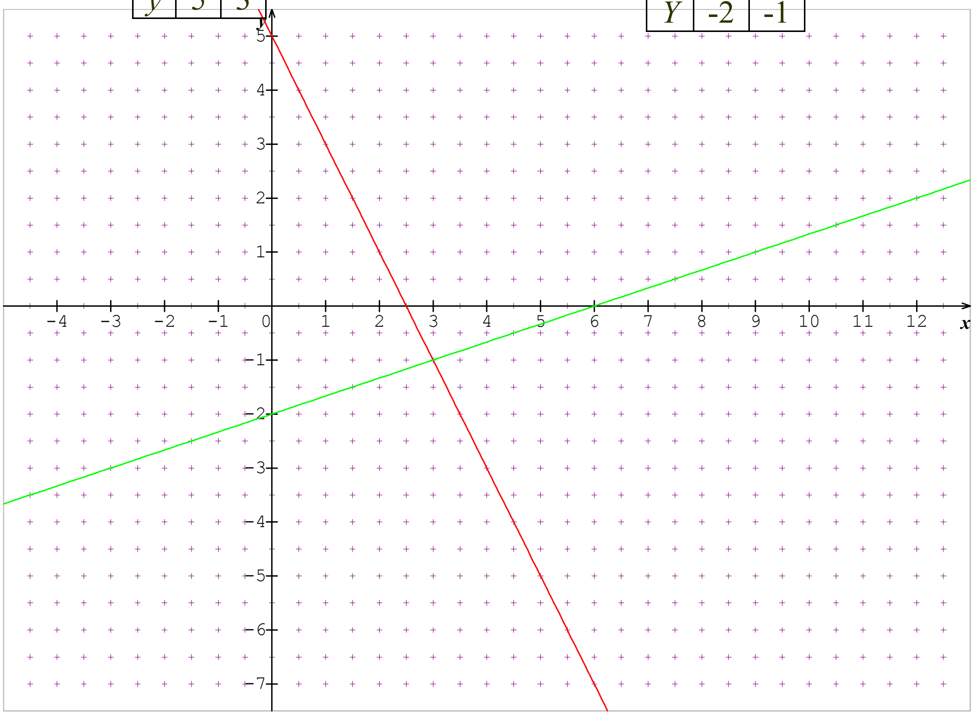
$2x + y = 5$ donne $y = -2x + 5$ et $x - 3y = 6$ donne $y=\frac{1}{3}x-2$

Pour tracer d1 on complète le tableau :

x	0	1
y	5	3

Pour tracer d2 on complète :

x	0	3
Y	-2	-1



La solution du système d'après le graphique est (3 ; -1).

b. **Résolution par substitution**

Méthode : on exprime une des inconnues en fonction des autres puis on remplace l'inconnue par cette expression dans les autres équations. On se ramène ainsi à la résolution de système 2 x 2 ou encore à la résolution d'un équation à une inconnue.

Exemple : Résoudre le système $\begin{cases} 3x - y + 3z = 10 & l1 \\ 4x - 2y + 7z = 20 & l2 \\ 2x - 3y - z = 3 & l3 \end{cases}$

1) on utilise la ligne $l1$ pour exprimer y en fonction x et z.

   $y=3x+3z-10$

2) on remplace y par $3x+3z-10$ dans $l2$ et $l3$

   $4x - 2(3x + 3z - 10) + 7z = 20$

   $2x - 3(3x + 3z - 10) - z = 3$

3) on obtient le système (S')

   $\begin{cases} -2x + z = 0 \\ -7x - 10z = -27 \end{cases}$

On résoud ce système en posant $z = 2x$

D'où $-7x-10(2x) = -27$

$-27x = -27$

$x = 1.$

Et donc $z = 2$.

4) on remplace x par 1 et z par 2 dans $l1$:

   $3x - y + 3z = 10$

   $-y = 10 - 3 - 6$

   $y = -1$

5) on vérifie que le triplet (1 ;-1 ;2) et bien solution des trois équations.

c. **Résolution par combinaison linéaire**

Cette méthode consiste à faire disparaître des inconnues en additionnant membres à membres des équations après avoir multiplié certaines d'entre elles par un réel convenablement choisie.

Etude d'un exemple :

Résoudre le système (S) $\begin{cases} 4x + 2y + z = 1 & (1) \\ 4x - 2y + z = 1 & (2) \\ x + y + z = 0 & (3) \end{cases}$

1re étape : nous remarquons qu'en additionnant (1) et (2), nous obtenons une équation où ne figure plus que deux inconnues x et z :

$8x + 2z = 2 \quad (4)$

2ème étape : nous cherchons à obtenir une nouvelle équation où ne figure plus que x et z. Pour cela, nous pouvons multiplier (3) par 2 et ajouter cette nouvelle équation à l'équation (2). Nous obtenons alors

$6x + 3z = 1 \quad (5)$.

On résoud le système : $\begin{cases} 8x + 2z = 2 \\ 6x + 3z = 1 \end{cases}$

Il admet pour solution $x = \frac{1}{3}$ *et* $z = \frac{-1}{3}$

<u>$3^{ème}$ étape</u> : nous reportons les valeurs de x et y dans une des 3 équations du départ, par exemple dans (3)

$y=0.$

<u>$4^{ème}$ étape</u> : il suffit de vérifier que le triplet ($\frac{1}{3}$; 0 ; $\frac{-1}{3}$) est bien solution du système (S).

Exercice : résoudre le système $\begin{cases} 2x + 5y - 4z = -39 \\ x - y + 7z = 54 \\ 3x + y - 2z = -11 \end{cases}$.

d. **<u>Pivot de gauss.</u>**

La méthode de Gauss consiste à transformer un système en un système équivalent (c'est-à-dire en un système admettant les mêmes solutions) par utilisation des seuls opérations élémentaires suivantes sur les lignes :

- échange de deux lignes ;
- multiplication d'une ligne par un nombre non nul
- addition d'une ligne avec une autre ligne pouvant avoir été multipliée.

Le but est d'obtenir un système triangulaire.

Résolvons le système suivant (s) $\begin{cases} x+10y-3z=5 \\ 2x-y+2z=2 \\ -x+y+z=-3 \end{cases}$

$1^{ère}$ étape :

Eliminons x dans l'équation (2) e (3) en utilisant l'équation (1).

- multiplions l'équation (1) par -2 ; ajoutons membre à membre la nouvelle équation ainsi obtenue et l'équation (2) ; nous obtenons l'équation :

  $-21\,y + 8z = -8$ (2').
- ajoutons membre à membre les équations (1) et (3) ; nous obtenons l'équation :

  $11y - 2z = 2$ (3')

Ecrivons alors le système (S_1) suivant, dans lequel :

- l'équation (1) du système initial (S) est conservée ;
- l'équation (2) est remplacée par (2') ;
- l'équation (3) est remplacée par (3') ;

$$(S_1) \quad \begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ -21y + 8z = -8 \\ 11y - 2z = 2 \end{cases}$$

$2^{ème}$ étape :

Eliminons y dans l'équation (3') en utilisant l'équation (2'). Multiplions l'équation (2') par $\frac{11}{21}$ et ajoutons membre à membre la nouvelle équation ainsi obtenue et l'équation (3') ; nous obtenons l'équation :

$$\frac{46}{21}z = -\frac{46}{21} \quad (3'').$$

Nous pouvons donc écrire le système (S’) suivant, dans lequel les équations (1) et (2’) du système (S_1) sont conservées et l’équation (3’) est remplacée par (3’’) :

$$(S') \begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ -21y + 8z = -8 \\ \dfrac{46}{21}z = -\dfrac{46}{21} \end{cases}$$

3ème étape : résolution

(S) a même ensemble de solutions que le système triangulaire (S’) que l’on sait résoudre facilement.

Le triplet solution du système est (2 ; 0 ; -1)

II. Systèmes d’inéquations linéaires

1. Inéquation linéaire à deux inconnues ;

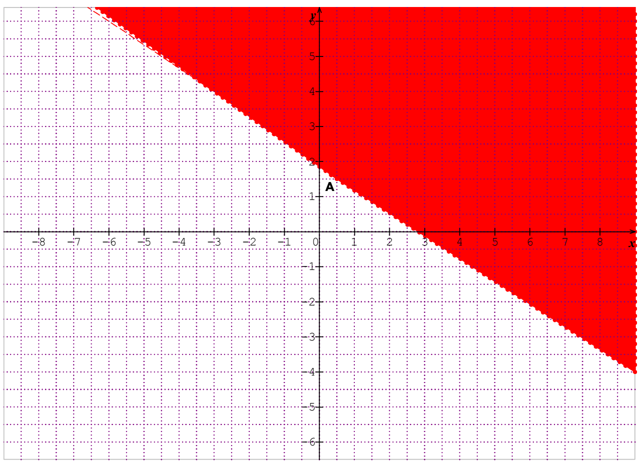
Soient a,b et c trois réels tels que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.

Dans un repère, d est la droite d’équation $ax + by + c = 0$.

Dans ce repère, l’ensemble des points M (x ; y) tels que $ax + by + c > 0$ est un demi-plan de frontière d, qui ne contient pas d.

L’autre demi-plan, la frontière d étant exclue, est l’ensemble des points M (x ; y) tels que

$ax + by + c < 0$.



Exemple : résolution graphique de $2x + 3y - 6 < 0$;

Dans un repère d’origine O, on trace la droite d d’équation $2x + 3y - 6 = 0$.

L’ensemble des points M (x ; y) tels que $2x + 3y - 6 < 0$ est un demi-plan de frontière d. Les coordonnées de O (0 ; 0) vérifient l’inéquation donc les solutions de l’inéquation sont représentées par le demi-plan contenant O.

2. Système d’inéquations linéaires à deux inconnues.

Résoudre graphiquement un système d’inéquations linéaires à deux inconnues, c’est représenter dans un repère l’ensemble des points M dont les coordonnées (x ; y) vérifient simultanément toutes les inéquations du système.

Exemple : Résolution graphique du système $\begin{cases} 3x-2y-9<0 \\ 4y+3x<27 \end{cases}$.

D est la droite d'équation $3x - 2y - 9 = 0$.
D' est la droite d'équation $4y + 3x = 27$.
Les coordonnées de O (0 ; 0) vérifient la première inéquation car l'inégalité $3\times 0-2\times 0-9<0$ est vraie.
Les coordonnées de O (0 ; 0) vérifient la deuxième inéquation car l'inégalité $4\times 0+3\times 0<27$ est vraie.
Donc les demi-plans qui représentent les solutions des deux inéquations du système sont respectivement les demi-plans de frontières *D et D',* contenant le point O.
Les solutions du système sont représentées par le domaine non hachuré.